第９回 基底と次元

1. 定義と性質

以下，$K=\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$，V，V' を K 上の**線型空間**とする。

定義

- $W \subset V$: 部分空間，$X \subset W$

  W は X によって**張られる**（X は W を**張る**）
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ W の全てのベクトルは X のベクトルの線型結合で表わせる

- $\mathcal{R}$: V のベクトルの有限列

  $\mathcal{R}$: V の**基底**
  $\overset{\text{def}}{\iff}$ W は以下の2つを満たす:

  (1) $\mathcal{R}$: 線型独立
  (2) V は $\mathcal{R}$ によって張られる

- $\mathcal{R}=\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r \rangle$: V の基底
  このとき $\mathrm{dim} V = r$ と定めて V の**次元**という。

性質

(1) $\mathcal{R}$ が V の基底であるとき，V のベクトルは $\mathcal{R}$ のベクトルの線型結合で**一意的に**表わせる。
(2) $\mathrm{dim} V = n \Longrightarrow V \cong K^n$
(3) $K^n \cong K^m \Longrightarrow n = m$

- W，U : 部分空間

$\Longrightarrow W \cap U$ と $W + U = \{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \in W,\, \boldsymbol{u} \in U\}$ も部分空間

- $T : V \to V'$ が線型写像

$\Longrightarrow T(V)=\{T(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ と $T^{-1}(\boldsymbol{0}')=\{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}'\}$ は部分空間

このとき

(1) $\mathrm{dim} W + \mathrm{dim} U = \mathrm{dim}(W+U) + \mathrm{dim}(W \cap U)$
(2) $\mathrm{dim} T(V) = \mathrm{dim} V - \mathrm{dim} T^{-1}(\boldsymbol{0}')$