# 第８回 線型空間と同型

## 1. 線型空間

以下，$K=\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ とする。$V$ を空でない集合とする。

**定義**

$V$ : $K$ 上の**線型空間**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $V$ に2つの算法 **加法** と **スカラー倍** が定まっていて，それぞれ以下を全て満たす。
(A) 加法
どんな $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対しても $V$ の要素 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ が定まっているとき，これを $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**和**という。

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
(2) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
(3) $V$ には要素 $\boldsymbol{0}$ があって，全ての $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$
(4) どんな $\boldsymbol{x}\in V$ に対しても $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}'\in V$ が唯一つある。$\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}$ で表わし，$\boldsymbol{y}+(-\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ で表わす。

(B) スカラー倍
どんな $\boldsymbol{x}\in V$ と $a\in K$ に対しても $V$ の要素 $a\boldsymbol{x}$ が定まっている。これを $\boldsymbol{x}$ の $a$ 倍という。

(1) $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$
(2) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}$
(3) $(ab)\boldsymbol{x}=a(b\boldsymbol{x})$
(4) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

$V$ が線型空間であるとき，$V$ の要素を**ベクトル**，$K$ の要素を**スカラー**という。

## 2. 部分空間

$V$ : $K$ 上の線型空間

**定義**

$W\subset V$ : $V$ の**部分空間**
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $V$ の加法とスカラー倍を $W$ に制限すると $W$ が線型空間

**<u>命題</u>**

$W \subset V$ : 部分空間
$\Leftrightarrow$ 次の3つを満たす

(1) $W \neq \emptyset$（例えば $\mathbf{0} \in W$）
(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$
(3) $\boldsymbol{x} \in W,\ a \in K \Rightarrow a\boldsymbol{x} \in W$

### 3. 線型写像

$V, V'$ : $K$ 上の線型空間
$T : V \to V'$, 写像

**<u>定義</u>**

$T$ : **線型写像**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ a \in K$ は次の2つを満たす

(1) $T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$
(2) $T(a\boldsymbol{x}) = aT(\boldsymbol{x})$

### 4. 同型写像

**全単射**

$X, Y$ : 集合, $f : X \to Y$

**<u>定義</u>**

- $f$ : **全射** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がある
- $f$ : **単射** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $[x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$
- $f$ : **全単射** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f$ : 全射かつ単射

**同型**

$V, V'$ : $K$ 上の線型空間
$T : V \to V'$, 写像

**<u>定義</u>**

- $T$ : **同型写像** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $T$ : 全単射の線型写像
- $V$ と $V'$ が **同型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 同型写像 $T : V \to V'$ が存在する

$V$ と $V'$ が同型のとき $V \cong V'$ で表わす。