第６回 二次形式

1. 二次形式

次を**n元の二次形式**という。 $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}:\text{実数})$

このとき $a_{ij} = a_{ji}$ と仮定しても良い。$(i \neq j)$

$A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ と置くとこれは n 次実対称行列である。ここで $\boldsymbol{x} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ とおくと

$F(x_1, \ldots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$

このとき右辺の二次形式を $A[\boldsymbol{x}]$ で表わす。

シルヴェスターの標準形

次の形の二次形式を**シルヴェスターの標準形**という。
$A[\boldsymbol{x}] = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$
このとき組 (p, q) を**符号**といい $\mathrm{sgn}(A)$ で表わす。

直交標準形

<u>**性質**</u>

実対称行列 A は直交行列 P で対角化できる。$({}^tP = P^{-1})$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

よって変数ベクトル $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換があるとすると
$A[\boldsymbol{x}] = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) = {}^ty({}^tPAP)\boldsymbol{y} = ({}^tPAP)[\boldsymbol{y}]$
つまり二次形式 $A[\boldsymbol{x}]$ は変数をうまくとりかえると次の形にできる: $\alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_2^2 + \cdots + \alpha_ny_n^2$

ここで P の列を入れかえると次のようにできる。

$$\begin{cases} \alpha_1, \ldots, \alpha_p > 0 \\ \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+q} < 0 \\ \alpha_{p+q+1}, \ldots, \alpha_n = 0 \end{cases}$$

これを**直交標準形**という。組 (p, q) を**符号**という。