第5回 固有空間

1. 部分空間

部分空間の定義

$W \subset \mathbb{C}^n$ (or $\mathbb{R}^n$) : **部分（線型）空間**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 以下の３つを満たす:

(1) $\boldsymbol{0} \in W$
(2) $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in W \Longrightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$
(3) $\boldsymbol{x} \in W,\ c \in \mathbb{C}$ (or $\mathbb{R}$) $\Longrightarrow c\boldsymbol{x} \in W$

基底の定義

$W \subset \mathbb{C}^n$: 部分空間，$\mathcal{S} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$: W のベクトルの列
このとき，$\mathcal{S}$ が W の**基底**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の２つを満たす:

(1) $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_k$: 線型独立
(2) W のベクトルは $\mathcal{S}$ の線型結合で表わせる

性質

- $\{\boldsymbol{0}\}$ 以外の全ての部分空間には基底がある
- $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$ が部分空間 W の基底ならば，W のどんな基底も $\boldsymbol{k}$ 個のベクトルから成る

このとき $\mathrm{dim}W = k$ と定めて W の**次元**という。

2. 固有空間

A : n 次正方行列，α : A の固有値
このとき，$\mathbb{C}^n$ の部分集合 $V(\alpha) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}\} \cup \{\boldsymbol{0}\}$ は部分空間
$V(\alpha)$ を A の固有値 α に関する**固有空間**という。

性質

- $\alpha,\ \beta$: A の固有値，$\alpha \neq \beta \Longrightarrow V(\alpha) \cap V(\beta) = \{\boldsymbol{0}\}$
- α : A の固有値，m : α の重複度 $\Longrightarrow \mathrm{dim}V(\alpha) \leq m$

定理

A : 対角化可能 $\Longleftrightarrow$ A の固有ベクトルによる $\mathbb{C}^n$ の基底がとれる