第４回 対角化と三角化

1. 対角化

A : n 次正方行列

対角化可能かどうかの調べ方

(1) A の固有値と固有ベクトルを全て求める
(2) 重複度が k $(k \geq 2)$ の固有値関して**線形独立な固有ベクトルが** k 個取れるか調べる

全部の固有値で取れた $\rightsquigarrow$ A: 対角化可能
取れない固有値があった $\rightsquigarrow$ A: 対角化不可能

対角化の方法

(1) A の固有値と固有ベクトルを全て求める
(2) 求めた**線形独立な固有ベクトルを**並べた n 次正方行列を P とおき，P^{-1} を求める
(3) $P^{-1}AP$ を計算する

2. 三角化

複素数の範囲では，n 次正方行列はいつでも三角化ができる。$A_0 = A$ とおく。

三角化の方法

(1) A_0 の固有値と固有ベクトルを1つ求める
(2) 求めた固有ベクトルを含めた基底を作る
(3) その基底となるベクトルを並べた行列を $\widetilde{P}_0$ とおき，$\widetilde{P}_0^{-1}$ を求める（固有ベクトルは1列目）
(4) $B_0 = \widetilde{P}_0^{-1} A_0 \widetilde{P}_0$ を計算する
(5) B_0 が三角行列でないとき，その1行目と1列目を除いた正方行列を A_1 とおき (1) から同じ手順をする（ただし，基底は $\mathbb{C}^{n-1}$ のものを作り，$\widetilde{P}_0$ のかわりに $\widetilde{P}_1$，B_0 のかわりに B_1 とおく）
(6) 三角行列 B_k が得られるまで A_2, A_3 ... と添字を増やしつつくり返す

三角化するための正則行列

$\widetilde{P}_i$ は $n-i$ 次正則行列であり，$P_i = \begin{pmatrix} E_i & O \\ O & \widetilde{P}_i \end{pmatrix}$ とおくと P_i は n 次正則行列（E_i は i 次単位行列で，$i = 0$ のときは $P_0 = \widetilde{P}_0$）
このとき $P = P_0 P_1 \cdots P_k$ が三角化に必要な正方行列であり，実際 $P^{-1}AP$ は三角行列