第３回 基底と行列の対角化

1. 座標系の変換

以下複素成分のベクトルと空間を考えるが，実数成分のベクトルと空間でも成り立つ。

$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n : \mathbb{C}^n$ の n 個のベクトル
$\boldsymbol{e}_i$: 第 i 成分が 1 で，その他の成分が全て 0 である $\mathbb{C}^n$ の単位列ベクトル（$1 \leq i \leq n$）

このとき
$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} : n$ 次正方行列
$\Longrightarrow P$ に対応する線型変換 T_P は $T_P(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{b}_i$ を満たす

特に $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ が線型独立であるとき P は正則

基底

$\mathbb{C}^n$ のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ が**基底**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ は次の二つを満たす:

(1) $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ は線型独立
(2) $\mathbb{C}^n$ の全てのベクトルは $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ の線型結合で表わせる

性質

- $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n : \mathbb{C}^n$ のベクトル，線型独立
  $\Longrightarrow \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$: 基底

2. 対角化

$A : n$ 次正方行列

$P^{-1}AP$ が対角行列となるような n 次正則行列 P が存在するとき，行列 A を**対角化可能**であるという。