

# 第2回 固有値と固有ベクトル



## 1. 固有値と固有ベクトル

$A$ :  $n$  次正方 (複素) 行列

零でない  $n$  成分列ベクトル  $\mathbf{u}$  と複素数  $\alpha$  が次の等式を満たすとする:  $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$   
このとき

- $\alpha$ :  $A$  の固有値
- $\mathbf{u}$ : 固有値  $\alpha$  に関する固有ベクトル

### 固有多項式

- 行列  $A$  の固有多項式 または 特性多項式  $\Phi(A: x)$ :  $n$  次多項式  $\det(xE_n - A)$
- 行列  $A$  の特性根: 方程式  $\Phi(A: x) = 0$  の解 (根)

### 性質

- (1)  $\alpha$  は行列  $A$  の固有値  $\iff \alpha$  は行列  $A$  の特性根
- (2)  $A$ :  $n$  次正方複素行列  $\implies A$  は重複をこめてちょうど  $n$  個の固有値をもつ
- (3)
  - $A$ :  $n$  次正方複素行列
  - $\beta_1, \dots, \beta_k$ :  $A$  の相異なる固有値
  - $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ :  $\beta_1, \dots, \beta_k$  に関する固有ベクトル $\implies \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  は線型独立

### 重複度

$A$ :  $n$  次正方複素行列

$\beta_1, \dots, \beta_k$ :  $A$  の全ての固有値

このとき固有方程式は次を満たす:

$$\Phi(A: x) = (x - \beta_1)^{m_1} (x - \beta_2)^{m_2} \dots (x - \beta_k)^{m_k} \quad (n = m_1 + m_2 + \dots + m_k)$$

各  $m_i$  を固有値  $\beta_i$  の重複度という。