第１１回 表現行列

1. 表現行列

以下，$K = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$，V，V' を K 上の線型空間とする。

定義

$\mathcal{S} = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle : V$ の基底，$\mathcal{T} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle : V'$ の基底
φ，ψ : それぞれ $\mathcal{S}$，$\mathcal{T}$ に対応する V，V' から K^n，K^m への同型写像
$T : V \to V'$，線型写像

このとき線型写像 $\psi \circ T \circ \varphi^{-1} : K^n \to K^m$ に対応する (m, n) 型行列 A が存在して
$\psi \circ T \circ \varphi^{-1} = T_A$（$T_A$ は A から導かれる線型写像）となる。この A を基底 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ に対応する T の**表現行列**という。

2. 階数

定義

$T : V \to V'$，線型写像
$T(V) = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in V\} \subset V'$

このとき $\dim T(V)$ を T の**階数**といい $r(T)$ で表わす。

3. 不変部分空間

$W \subset V$: 部分空間，　$T : V \to V$，線型変換

定義

$W : T$**不変** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} [\boldsymbol{x} \in W \Longrightarrow T(\boldsymbol{x}) \in W]$

定理

$W_1, \ldots, W_p \subset V : T$不変，$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_p$
$\mathcal{S}_i : W_i$ の基底（$1 \leq i \leq p$），$\mathcal{S} : \mathcal{S}_i$ を合わせた V の基底

このとき $\mathcal{S}$ に関する T の表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$