第１０回 直和と基底の取りかえ

1. 直和

以下，$K=\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$，V を K 上の線型空間，W_i $(i=1,\ldots,k)$ を V の部分空間とする。

定義

$U=W_1+W_2 : W_1$ と W_2 の**直和**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全てのベクトル $\boldsymbol{u}\in U$ が $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{w}_i\in W_i,\ i=1,2)$ と一意的に表わされる

このとき $U=W_1\oplus W_2$ で表わす。

命題　次は同値:

(1) $U=W_1\oplus W_2$
(2) $W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$
(3) $\mathrm{dim}U=\mathrm{dim}W_1+\mathrm{dim}W_2$

一般の場合

$U=W_1+W_2+\cdots+W_k=\{\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\cdots+\boldsymbol{w}_k\mid \boldsymbol{w}_i\in W_i\}$ と定め，全てのベクトル $\boldsymbol{u}\in U$ が $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2+\cdots+\boldsymbol{w}_k$ $(\boldsymbol{w}_i\in W_i)$ と一意的に表わされるとき $U=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k$ と書き $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の**直和**という。

2. 基底の取りかえ

$\mathcal{S}=\langle \boldsymbol{u}_1,\ldots \boldsymbol{u}_n\rangle$，$\mathcal{T}=\langle \boldsymbol{v}_1,\ldots \boldsymbol{v}_n\rangle : V$ の基底

命題

- $\varphi_{\mathcal{S}} : V\to K^n$ を $\varphi_{\mathcal{S}}(c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{u}_n)={}^t\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}$ と定めると $\varphi_{\mathcal{S}}$ は同型写像
- $\Psi : \{V\text{ の基底}\}\to\{\varphi : V\to K^n\text{, 同型写像}\}$ を $\Psi(\mathcal{S})=\varphi_{\mathcal{S}}$ で定めると Ψ は全単射

定義

$\varphi:=\varphi_{\mathcal{S}}$ と $\psi:=\varphi_{\mathcal{T}}$ は同型写像だから $\varphi\circ\psi^{-1}$ も同型写像である。ここで $\varphi\circ\psi^{-1}$ は K^n の同型写像（線型変換）であるから，n 次正則行列 P が存在して $\varphi\circ\psi^{-1}=T_P$ となる（$T_P : P$ から導かれる線型変換）。この P を**基底の取りかえ $\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ の行列** という。

命題

$\boldsymbol{v}_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}\boldsymbol{u}_i$ $(j=1,\ldots,n)$ と表わしたとき，n 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} p_{ij}\end{pmatrix}$ は基底の取りかえ $\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ の行列