線形代数学2 レポート解答

2019 年 12 月 20 日

1. 解

1) $2\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\\-4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ より線型従属である。

2) 定義より $a\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ において $a=b=c=0$ 以外の解を持つかどうかを調べれば良い。上の式は次のように書きかえが出来る。

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

左辺の 3 次正方行列の行列式は 0 ではないので，正則であり逆行列が存在する。左からその逆行列をかければ $a=b=c=0$ を得る。したがって与えられたベクトルの列は線型独立である。

3) (2) と同様に計算すれば線型独立であることが分かる。

2. 解

1) 求める行列の各成分を変数で置いて，1 次方程式系を作って解を求めれば良い。例えば次のようにする。

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\2\\-6\end{pmatrix}$$

これにより 9 個の等式が得られ，それぞれ解を求めることで求める行列が得られる。解は次の行列になる。

$$\begin{pmatrix}11&-6&-12\\0&2&0\\9&-6&-10\end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix}12&13&0\\-9&-10&0\\9&13&-1\end{pmatrix}$$

3. 解

1) まずベクトル $(0,0,0)$ が V のベクトルであることを示す。（これによって $V \neq \emptyset$ となる。$\emptyset$ は線型空間ではない。）$2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$ であるから $(0,0,0) \in V$ である。

次に $\boldsymbol{x} = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{y} = (x_2, y_2, z_2) \in V$ のとき $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ を示す。$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ であることに注意する。$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ であることから次が成り立つ。

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) = 0$$

よって $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ となる。

同様にすると $a \in \mathbb{R}$ に対して $a\boldsymbol{x} \in V$ が成り立つ。したがって V は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

2) $2 \cdot 1 + (-1) - 1 = 0$ であるから成り立つ。

3) 例えば $(1,0,2)$ と $(0,1,1)$ をとる。これらは線型独立である。

V の条件から V のベクトルは必ず次の形になることが分かる。

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ 2s + t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって $\langle (1,0,2), (0,1,1) \rangle$ は V の基底である。

4) 基底を成しているベクトルの数が 2 つであるから次元は 2 である。

4. 解

1) $s, t \in \mathbb{R}$

- A: 固有値 2（重複度 2）: 固有ベクトル $s\ {}^t(4,0,3) + t\ {}^t(2,3,0)$
  固有値 -1（重複度 1）: 固有ベクトル $s\ {}^t(1,0,1)$
- B: 固有値 -1（重複度 2）: 固有ベクトル $s\ {}^t(0,0,1)$
  固有値 3（重複度 1）: 固有ベクトル $s\ {}^t(-13,9,0)$

2)
- A: 各重複度と固有空間の次元が一致しているので対角化可能である。
- B: 固有値 -1 の重複度と固有空間の次元が違うので対角化可能ではない。

3) 答えは 1 つではない。例えば次の通り。

- A:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- B:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. 解

それぞれ対応する行列の固有値を求めれば良い。

1) $(2, 1)$　　2) $(1, 1)$