線形代数学 2 期末演習解答

2019 年 12 月 20 日

1. 解

1) 定義通り計算する。まず $a, b, c \in \mathbb{R}$ として次を求める。

$$a\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+4b-c & a+b \\ -a+2b & 2a-2b+c \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1) $= \mathbf{0}$ としたとき $a = b = c = 0$ となれば $\mathcal{S}$ は線型独立である。行列の各成分を比較すると次の一次方程式系を得る。

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ここで左辺の $(4, 3)$ 型行列の階数は 3 であるから、この a, b, c の解は 0 しかない。よって線型独立である。

2) 空間 V の次元は 4 であるが、$\mathcal{S}$ に含まれているベクトルは 3 つである。したがって空間 V のベクトルで $\mathcal{S}$ のベクトルの線型結合では表わせないベクトルが存在するから。

3) 例えば $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を加えると基底となる。

2. 解

1) 固有方程式を計算すれば固有値 2 と -1 が得られ、それぞれの重複度は 2 と 1 となる。

2) 固有値 2 に関する固有空間の基底は、例えば $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ が取れる。（それぞれが固有値 2 に関する固有ベクトルであることに注意する。）また固有値 -1 に関する固有空間の基底は $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ が取れる。

3) それぞれ固有空間の次元と重複度が一致するので、対角化可能である。

4) 対角行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり、正則行列 P は例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる。

3. 解

1) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) 普通に対角化するだけなら固有ベクトルを並べれば良いが、今回は直交行列を作らなければならない。

実は各固有ベクトルで直交しているものを選び、さらにそれぞれの長さを 1 にしていつものように並べれば、正則行列 P は直交行列になることが知られている。またこのような行列 P は実対称行列に関してはいつでも取ることが可能である。よってまずはいつも通り固有ベクトルを求めて、そのあとそれぞれの固有ベクトルの長さを 1 にすれば良い。

固有値は 1 と -1 であり、固有値 1 に関しては ${}^t(1,1,0)$ が取れて、また固有値 -1 に関しては ${}^t(0,0,1)$ と ${}^t(-1,1,0)$ が得られる。それぞれ内積を計算し、直交していること確かめておく。長さを 1 にすると ${}^t(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$、${}^t(0,0,1)$、${}^t(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ となる。

よってこれらを並べた行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ は直交行列である。（実際 ${}^tPP = E$ となる。）

3) 定義通り $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P^{-1}DP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めれば良い。（ただし、係数は正のものを最初に並べて、その後に負のものを並べることに注意する。）答えは $x^2 - y^2 - z^2$ となる。

4. 解

固有値は 2 であり、その重複度は 2、また固有空間の次元は 1 である。よってジョルダン細胞の数は 1 つになるからジョルダン標準形は $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる。