

線形代数学2 演習解答

2019年10月31日

1. まず線型独立の定義を思い出す。Q が線型独立であるかどうか確かめるためにまず

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

を満たす s と t を求める。これは次の斉次方程式系が解ければ良い。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 0$$

左側の $(3, 2)$ 行列の階数は 2 だからこの方程式系は自明な解しか持たない。つまり $s = t = 0$ である。したがって Q は線型独立である。

一方同様にして計算すると R には非自明な解があることが分かる。例えば

$$-\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

である。したがって R は線型従属である。

2.

- 1) $x = y = 0$ のとき $x - y = 0$ を満たすから $\mathbf{0} = (0, 0) \in V$ である。

次に V の 2 つのベクトルを取って $\mathbf{v} = (x_1, y_1) \in V$, $\mathbf{w} = (x_2, y_2) \in V$ とする。よって $x_1 - y_1 = 0$ かつ $x_2 - y_2 = 0$ が成り立つ。よって $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 0$ である。したがって $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in V$ である。

最後に $\mathbf{v} = (x, y) \in V$ と取り直し、さらに $c \in \mathbb{R}$ とする。 $x - y = 0$ であるから $cx - cy = 0$ である。よって $c\mathbf{v} = (cx, cy) \in V$ である。したがって V は部分線型空間である。

- 2) $x = y = 0$ としたとき、 $x - y \neq 1$ となるから $\mathbf{0} = (0, 0) \notin W$ である。したがって W は部分線型空間ではない。

- 3) 集合 V の条件を満たすベクトルを適当に取ってきて基底の条件を満たすことを確かめればよい。ここでは $\mathbf{a} = (1, 1)$ をとる。 $1 - 1 = 0$ であるから $\mathbf{a} \in V$ である。 $\langle \mathbf{a} \rangle$ が V の基底であることを確かめる。

\mathbf{a} は当然線型独立である。また V のベクトル $\mathbf{v} = (x, y)$ は全て $x - y = 0$ を満たすから $x = y$ である。よって $\mathbf{v} = (x, x)$ である。したがって $x\mathbf{a} = \mathbf{v}$ となるから空間 V のベクトルは全て $\langle \mathbf{a} \rangle$ の線型結合で表わせる。よって基底となる。

- 4) 上の結果より次元は 1 である。

3.

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置いて計算すれば良い。 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2) A は固有値 1, 4 を持つ。よって A には少なくとも 2 つの線型独立である固有ベクトルがある。 A は 2 次正方行列であり、それらの固有ベクトルは \mathbb{R}^2 の基底を成す。したがって A は対角化可能である。(他にも A の固有値の重複度が全て 1 であるから、などでも良い。)

3) A は対角化すると例えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる。このとき P は例えば $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.

1) B は重複度 3 の固有値 1 を持つ。しかし 1 の固有空間の次元は 1 であるから B は対角化可能ではない。

2) ${}^t(0, 1, 0)$ が固有ベクトルだから $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおいて $P_0^{-1}BP_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

となる。これで 1 列目は三角行列の条件を満たした。

次に右下の (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3) 成分を取り出し 2 次正方行列を作って A_1 とおく。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A_1 の固有ベクトルとして ${}^t(0, 1)$ が取れるから $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと A_1 は三角化出来る。

$$Q_1^{-1}A_1Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この Q_1 を右下に置いた 3 次正方行列 P_1 をつくる。すなわち 1 列目は ${}^t(1, 0, 0)$ で 1 行目は (1, 0, 0) にして、残りの部分に Q_1 を置く。

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって $P = P_0P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ で三角化される。

5. この二次形式に対応する行列は $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ である。この行列は正の固有値 1 つと負の固有値 1 つを持つから符号は (1, 1) となる。