線形代数学 2 対角化演習解答

2019 年 12 月 20 日

1. 解

1) $\mathcal{Q}$: 独立，$\mathcal{R}$: 従属，$\mathcal{S}$: 独立

2)
- $\mathcal{Q}$: $(0,0,1)$ が表わせないのでならない
- $\mathcal{R}$: 線型従属なのでならない
- $\mathcal{S}$: 空間が 3 次元で 3 つのベクトルが独立なので基底になる

2. 解

1)
- A: 固有値 3，固有ベクトル $s\ {}^t(0,-1,1)$
  固有値 2，固有ベクトル $s\ {}^t(1,0,1)$
  固有値 -1，固有ベクトル $s\ {}^t(2,0,1)$
- B: 固有値 4，固有ベクトル $s\ {}^t(-1,1,0)$
  固有値 -1，固有ベクトル $s\ {}^t(-1,0,3)+t\ {}^t(2,3,0)$
- C: 固有値 2，固有ベクトル $s\ {}^t(1,0,1)$
  固有値 -1，固有ベクトル $s\ {}^t(14,-9,26)$

2)
- A: 全部重複度 1
- B: 固有値 4，重複度 1
  固有値 -1，重複度 2
- C: 固有値 2，重複度 2
  固有値 -1，重複度 1

3)
- A: 重複度が全て 1 なので可能
- B: 重複度 2 の固有値に関する固有空間の次元が 2 なので可能
- C: 固有値 2 の重複度は 2 だが，固有空間の次元が 1 なので不可能

4)
- A: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- B: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- C: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) 答えは 1 つではない。例えば以下の通り。

- A: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- B: $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
- C: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) 確かめてください。

7) 同上

8) 試してみてください。

3. 解

1) 対角化された行列が導く線型変換は，基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を固有値倍の $\boldsymbol{e}_i$ へ写す。これは各固有値に関する固有ベクトルが，元々の行列が導く線型変換で固有値倍されることと本質的に同じことである。したがって対角化可能であれば座標系（基底）を成す固有ベクトルを取ることが出来ることになる。基底を変換する行列は正則であり，またその行列は基底を成す固有ベクトルを並べれば得ることが出来る。

2) ベクトルの集合 $\mathcal{Q}$ があれば，そのベクトルの線型結合で表わされるベクトル全体からなる空間 W は $\mathbb{C}^n$ の部分空間である。特にそのベクトルの集合 $\mathcal{Q}$ が線型独立であれば W の全てのベクトルは $\mathcal{Q}$ のベクトルの線型結合で一意的に表わすことができる。（2 通りの線型結合で表わせたとすると，と考えると簡単に証明できる。）さらに $\mathcal{Q}$ が基底であったとすると $W = \mathbb{C}^n$ である。したがって $\mathbb{C}^n$ の全ての点は $\mathcal{Q}$ の線型結合として一意的に表わされることが分かる。