線形代数学 II 対角化演習

2019 年 10 月 4 日

1. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルの集合 $\mathcal{Q}$，$\mathcal{R}$，$\mathcal{S}$ に対して以下の問に答えよ。

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

1) それぞれが線型独立であるか線型従属であるかを答え，それを証明せよ。
2) それぞれが基底となるかならないかを答え，それを証明せよ。

2. 次の行列 A，B，C を考える。

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

A，B，C それぞれについて

1) 固有値と固有ベクトルを全て求めよ。
2) それぞれの固有値の重複度を求めよ。
3) 対角化可能か？ 理由も述べよ。
4) 対角化可能であれば対角行列を，不可能であれば三角行列を求めよ。
5) 対角化，もしくは三角化に用いた用いた正則行列 P は何か。
6) 得られた対角行列，または三角行列の対角成分がそれぞれの固有値であることを確かめよ。
7) 正則行列 P を作るとき，用いる固有ベクトルを変えたり順番を入れかえたりしたときに得られる対角行列や三角行列がどのように変化するか確かめよ。
8) 正則行列 P を変えたとき得られる対角，三角行列に現れる変化は何故起こるのかを考えよ。

3. 以下について理由を考えよ。（既に講義で理由を述べているものもある）

1) 対角化可能であるとき，適当な固有ベクトルを並べて得らえる正方行列は正則となるが，これは何故か。
2) ベクトルの集合 $\mathcal{Q}$ が $\mathbb{C}^n$ の基底であるとき，$\mathbb{C}^n$ の全ての点（つまり位置ベクトル）が $\mathcal{Q}$ の線型結合として一意的に表わされるのは何故か。