第９回 1次方程式系

1. 1次方程式系

$x_1, \ldots, x_n$: 未知数
a_{ij}, c_i : 定数（$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

これを**1次方程式系**という。

$A = (a_{ij})$: (m, n) 型行列
$\boldsymbol{x} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$: n 行列ベクトル
$\boldsymbol{c} = {}^t\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$: m 行列ベクトル

上の1次方程式系は次の行列の等式と同じ : $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$
それぞれに次の名前が付いている。

- A : **係数行列**
- $\boldsymbol{x}$: **未知ベクトル**
- $\boldsymbol{c}$: **定数項ベクトル**

拡大係数行列

A : 係数行列，$\boldsymbol{x}$: 未知ベクトル，$\boldsymbol{c}$: 定数項ベクトル

A と $\boldsymbol{c}$ を並べた $(m, n+1)$ 型行列 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ を**拡大係数行列**，$n+1$ 行列ベクトル
$\widetilde{\boldsymbol{x}} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n & -1 \end{pmatrix}$ を**拡大未知ベクトル**という。

このとき次が成り立つ : $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$

解を持つかどうかの判定方法

A : 係数行列，$\widetilde{A}$: 拡大係数行列

- 1次方程式系が解を持つ $\Leftrightarrow r(A) = r(\widetilde{A})$ 　（$r(A)$，$r(\widetilde{A})$: A，$\widetilde{A}$ の階数）