第８回 逆行列の求め方

1. 線型独立と線型従属

$\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k$: n 次元空間のベクトル k 個

- $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k$ の**線型結合** : $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k$ で表わされるベクトル ($c_1,\, \ldots,\, c_k$: 定数)
- $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k$ の**線型関係** : $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = 0$
- **自明**な線型関係 : $c_1 = \cdots = c_k = 0$ である線型関係
- $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k$ が**線型従属** : $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k$ に自明でない線型関係がある
- $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k$ が**線型独立** : $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_k$ に自明でない線型関係がない（つまり線型従属ではない）

性質

- k 個のベクトルが線型独立 $\Leftrightarrow$ それらのベクトルはちょうど k 次元空間を "張る"

2. 逆行列

n 次正方行列 A の逆行列の求め方 :

(1) 左側に A，右側に単位行列を並べた $(n, 2n)$ 型行列を作る
(2) 左側の行列を簡約行列にするように行基本変形を行なう
(3) 最後，右側に出てくる行列が A の逆行列

ただし左側の行列の簡約化が単位行列ではないとき，行列 A は逆行列を持たない。

正則性の判定方法

次のいずれかを満たせば n 次正方行列 A は正則である :

- $r(A) = n$
- 行列 A は行基本変形で単位行列に変形できる
- $\boldsymbol{x}$: n 行の列ベクトル　このとき $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$
- $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$ と書いたとき $\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{a}_n$ は線型独立
- $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ と書いたとき $\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{b}_n$ は線型独立