第６回 基本変形と簡約行列

1. 行列の基本変形

$P_n(i,j)$，$Q_n(i;c)$，$R_n(i,j;c)$: n 次正方行列（$i \neq j$，$c \neq 0$）

- $P_n(i,j)$: 単位行列の第 i 行と第 j 行を入れかえた行列
- $Q_n(i;c)$: 単位行列の (i,i) 成分を c にした行列
- $R_n(i,j;c)$: 単位行列の (i,j) 成分を c にした行列

$P_n(i,j)$，$Q_n(i;c)$，$R_n(i,j;c)$ を**基本行列**，基本行列を行列に左から掛けることを**行（左）基本変形**という。

性質

- 基本行列は正則
- $P_n^{-1}(i,j) = P_n(i,j)$，$Q_n^{-1}(i;c) = Q_n(i;1/c)$，$R_n^{-1}(i,j;c) = R_n(i,j;-c)$

行基本変形の意味

行列の行基本変形は次の操作をすることと同じである。

(1) 行列の第 i 行と第 j 行を入れかえる
(2) 行列の第 i 行を c 倍する
(3) 行列の第 j 行を c 倍したものを第 i 行に足す

2. 簡約行列

次の4つの条件を満たす行列を**簡約行列**という。

(1) 第 i_0 行の全ての成分が 0 であるとき，第 i_0 行より下にある全ての成分が 0
(2) 各行において左から見て最初に現れる 0 ではない成分は 1（この成分を行の**主成分**という）
(3) $i_0 < i_1$ のとき第 i_0 行の主成分は第 i_1 行の主成分より左にある
(4) 各行の主成分と同じ列にある成分は全て 0

全ての行列 A は行基本変形を有限回行なうことで簡約行列 A' に変形することができる。このとき簡約行列 A' に含まれる主成分の数を行列 A の**階数**，または**ランク**といい $r(A)$ で表わす。