第3回 行列

1. 行列

- (m, n) 型**行列** : m，n を自然数としたとき，数字を縦に m 行，横に n 列で合計 mn 個並べた表
- 行列の (i, j) **成分** : 行列を構成する各数字のうち，第 i 行，第 j 列にあるもの
- n **次正方行列** : (n, n) 型行列

行列 A と行列 B が**等しい**とは，これらが同じ型で，かつ対応する各成分が等しいときをいう。

行列の演算

行列の演算は実数などと違って，**いつでも行なえるわけではない**ことに注意する。

- **和**

  行列 $A = (\, a_{ij} \,)$ と 行列 $B = (\, b_{ij} \,)$ が同じ型 $\Rightarrow A + B = (\, a_{ij} + b_{ij} \,)$

- **定数(スカラー)倍**

  c : 実数 のとき，$cA = (\, ca_{ij} \,)$

- **積**

  行列 $A = (\, a_{ij} \,)$ が (l, m) 型で，行列 $B = (\, b_{jk} \,)$ が (m, n) 型 (つまり，A の列の数 = B の行の数)
  $\Rightarrow AB = \left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} b_{jk} \right)$: (l, n) 型行列

注意 : 行列 AB が定義されるからといって，行列 BA が定義されるとは限らない。また，たとえ行列 BA が定義されたとしても $AB = BA$ とは限らない。

2. 線型変換

- **変換** : 空間内の各点を，同じ空間内のどれか一点へそれぞれ対応させること
- **単位ベクトル** : 長さが 1 のベクトル

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の各点を位置ベクトルとして表わし，$(n, 1)$ 型行列だと考える。このとき n 次正方行列 A に対して，各点 $\boldsymbol{x}$ を行列の積 $A\boldsymbol{x}$ へ対応させる変換を行列 A が定める**線型変換**という。

逆に "線型変換" があれば，その変換は行列で表現することができる。i 番目の成分のみが 1 の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ とする（$1 \leq i \leq n$）。各 $\boldsymbol{e}_i$ が線型変換で $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{e}_j$ へ写るとき，その変換は行列 $(\, a_{ij} \,)$ で表わされる。