第２回 ベクトル積

1. 平面の方程式（続き）

$\boldsymbol{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$: 平行ではなく，かつ零ではないベクトル
$\boldsymbol{x}_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0)$: 空間内の点 P の位置ベクトル

平面のベクトル方程式は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$ で，計算より次の平面の方程式が得られる。

$$(a_2b_3 - a_3b_2)(x - x_0) + (a_3b_1 - a_1b_3)(y - y_0) + (a_1b_2 - a_2b_1)(z - z_0) = 0$$

$\boldsymbol{n} := (a_2b_3 - a_3b_2,\, a_3b_1 - a_1b_3,\, a_1b_2 - a_2b_1)$ とすると，$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ が得られる。このベクトル方程式も平面を表わしている。$\boldsymbol{n}$ のように平面に直交するベクトルを**法線ベクトル**と言う。

法線ベクトルと平面の交わりの関係

$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$: 平面 α，β それぞれの法線ベクトル

- $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$: 平行 $\longrightarrow$ α と β は交わらない or $\alpha = \beta$
- $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$: 平行ではない $\longrightarrow$ α と β は直線で交わる

2. ベクトル積

$\boldsymbol{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$: ベクトル

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := (a_2b_3 - a_3b_2,\, a_3b_1 - a_1b_3,\, a_1b_2 - a_2b_1)$$

これを**ベクトル積**と呼ぶ。

性質

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$: 平行でなく，かつ零でないベクトル

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ それぞれに直交 $\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$ and $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$
(2) $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がつくる平行四辺形の面積と等しい
(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は右手系を成す
(4) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$
(5) $c(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (c\boldsymbol{b})$
(6) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$，$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$