第１３回 余因子行列

1. 行列式の展開と余因子行列

余因子展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列

- A の第 $(i,\, j)$ **小行列式** Δ_{ij} : A から第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列の行列式
- A の第 $(i,\, j)$ **余因子** $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$
- A の**余因子行列** $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$

$1 \leq i, j \leq n$ に対して次が成り立つ。これらをそれぞれ第 i 行，第 j 列に関する**余因子展開**という。

- $\det A = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$
- $\det A = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$

性質

- $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det A \cdot E_n$
  よって$\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = (\det A)^{-1}\widetilde{A}$

2. クラメールの公式

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列，正則
$\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: 未知ベクトル
$\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2, \ldots, b_n)$: 定数項ベクトル

このとき１次方程式系 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は次の通り。（分子は第 i 列を $\mathbf{b}$ に置きかえている）

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

これをクラメールの公式という。