第１２回 行列式の性質

1. 多重線型性と交代性

多重線型性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & ca'_{1j_0} + da''_{1j_0} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & ca'_{nj_0} + da''_{nj_0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1j_0} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{nj_0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a''_{1j_0} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a''_{nj_0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交代性

$$\begin{vmatrix} a_{1\tau(1)} & a_{1\tau(2)} & \dots & a_{1\tau(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\tau(1)} & a_{n\tau(2)} & \dots & a_{n\tau(n)} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\tau : n \text{ 文字の置換})$$

(多重線型性と交代性は行についても成り立つ。)

性質

$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) : n$ 次正方行列，c : 定数

- $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ となる $i, j\ (i \neq j)$ が存在する $\Rightarrow \det A = 0$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- n 次正方行列 A が正則 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

2. 行列式の計算

$P_n = P_n(i, j)$，$Q_n = Q_n(i; c)$，$R_n = R_n(i, j; c)$: 基本行列

以下の性質より，基本変形と "分解" を用いて行列式を簡単にできる。

- $\det(P_n A) = \det(A P_n) = -\det A$
- $\det(Q_n A) = \det(A Q_n) = c \cdot \det A$
- $\det(R_n A) = \det(A R_n) = \det A$
- $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ または $A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}$

基本変形を用いて一番下の性質を満たすような形に行列式を変形し，元よりも小さな行列の行列式に直してゆく。