

第 1 1 回 行列式



1. 置換

- **置換** : n 文字の並べかえ
- **恒等置換** : 何も並べかえない n 文字の置換
- **l サイクル** : n 文字の中の l 文字を順番に入れかえる置換 $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_l \rightarrow i_1$
- **互換** : 2 サイクル
- サイクルの **分離積** : 共通の文字を含まないサイクルの積

性質

- 全ての l サイクルは $l - 1$ 個の互換の積で表わせる
- 全ての置換はサイクルの分離積で表示できる。またこの表示はサイクルの並べかえの差を除いて一意的
- 上の二つから、全ての置換は互換の積で表わせる
- **偶置換** : 偶数個の互換の積で表わせる置換
- **奇置換** : 奇数個の互換の積で表わせる置換

置換 σ を互換の積 $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ で表わしたとする。 $\text{sgn } \sigma = (-1)^k$ と定義し、 σ の**符号**という。

2. 行列式

$A = a_{ij} : n$ 次正方行列

$S_n = \{ n \text{ 文字の置換} \}$

行列式 $\det A$ を次の通りに定義する。

- $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$

$\det A$ 以外にも、 $|A|$ や
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
 などと表わす。