第１０回 1次方程式系の解空間

1. 1次方程式系の解空間

- **斉次1次方程式系** : 定数項ベクトルが $\boldsymbol{0}$ の一次方程式系
- 斉次1次方程式の**自明な解** : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
- 一次方程式系の**解空間** : 一次方程式系を満たす解全体から成る集合 （$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}\}$）

性質

斉次1次方程式系の解空間 V は次の3つを満たす:

(1) $\boldsymbol{0} \in V$，つまり $V \neq \emptyset$
(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$
(3) $\boldsymbol{x} \in V$，$c \in \mathbb{C} \Rightarrow c\boldsymbol{x} \in V$

また，係数行列の階数 r が列の数 n より小さいならば，解空間 V には線型独立な $n - r$ 個のベクトルが存在する。さらに V の全てのベクトルはこれらの線型結合で表わされる。

斉次ではない場合

- 1次方程式系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ に**伴う**方程式系 : $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，つまり定数項ベクトルを $\boldsymbol{0}$ にした斉次方程式系

1次方程式系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解空間 U と，この方程式系に伴う方程式系の解空間 V のあいだには次の関係がある:

(1) $\boldsymbol{u} \in U$，$\boldsymbol{v} \in V \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
(2) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in V$
(3) $\boldsymbol{u}_0 \in U$: 固定　このとき U に属するベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して適当なベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ がただ一つ取れて $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{v}$