線形代数学 I　レポート 解答

点数は減点方式で 0 以上の点数なら満点。各問題につき，間違っている場合は -1 点となる。（ただし部分点あり。）

1. 解答

1) 例えばベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を用いると良い。$\boldsymbol{n} = (6, 1, 3)$ となる。この定数倍でも良い。
2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含むということは，ベクトル $\boldsymbol{n}$ はこの平面の法線ベクトルとなる。よって $6x + y + 3z + d = 0$ となる。点 $(1, 0, 0)$ を通るのだから d は次の通り。

$$\begin{aligned} 6 + 0 + 0 + d &= 0 \\ d &= -6 \end{aligned}$$

したがって求める方程式は $6x + y + 3z - 6 = 0$ となる。この定数倍でも良い。
3) 与えられた方程式で表わされる平面の法線ベクトルは $(2, 3, 1)$ である。これは上で得た平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (6, 1, 3)$ と平行ではない。したがって二つの平面は直線で交わる。その方程式は t をパラメータとすると次の通り。

$$\boldsymbol{x} = t\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) + \left(\frac{19}{16}, -\frac{9}{8}, 0\right)$$

2. 解答

1) 行列 A とそれぞれの点をかけ算すれば良い。

$$A\left(-1\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad A\left(1\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A\left(0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $T_A(-1) = (1, -2)$，$T_A(1) = (-1, 2)$，$T_A(0) = (0, 0)$ となる。
2) 実際に図を描くと分かるが，答えは $2x + y = 0$ となる。（原点を通るので普通の 1 次関数なのはすぐに分かり，通る点から傾きも分かる。）
3) 行列 B とそれぞれの点をかけ算すれば良い。

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって $T_B(1, 0, 0) = (2, -1)$，$T_B(0, 1, 0) = (0, 0)$，$T_B(0, 0, 1) = (-4, 2)$ となる。
4) (2) と同様。答えは $x + 2y = 0$ となる。

3. 解答

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。よって

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるように定めるから $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ である。同様にして $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

2) 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において $ad - bc \neq 0$ のとき逆行列が $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であったことを思い出す。これを行列 B にあてはめると $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である。これは実際に $BB^{-1} = B^{-1}B = E_2$ であることが確かめられる。

3) 点の対応をよく見ると，これはまず T_B の逆対応をさせて，そのあと T_A で対応させたものだということが分かる。よって $C = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ である。

4. 解答

階数を求めるだけなら簡約行列まで変形する必要はないが，今回は簡約化する問題なので最後までやる。

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①+2\times②} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+(-2)\times②]{①+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これで簡約化は完了し，階数は 2 である。