線形代数学 I 演習解答

2019 年 5 月 31 日

1.

1) 定義通り計算すれば良い。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (1-0,\, 0+1,\, 1-2) = (1,\, 1,\, -1)$$
$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$$

2) $x+y-z=0$ である。一般的にベクトル $\boldsymbol{n} = (a_0,\, b_0,\, c_0)$ に直交する平面の方程式は $a_0x+b_0y+c_0z=0$ となる。

3) (2) で得た方程式の $(x,\, y,\, z)$ に $(-1,\, 1,\, 0)$ と $(2,\, -1,\, 1)$ をそれぞれ代入して 0 になれば良い。実際に計算すれば確かめられる。

2.

1) $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ かつ $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ であるから，T_A，T_B の定義より $T_A(0,\, 0,\, 0) = T_B(0,\, 0,\, 0) = (0,\, 0)$ となる。

2) それぞれと行列 A, B との積をとれば良い。よって $T_A(e_x) = (1,\, 0)$, $T_A(e_y) = (-1,\, 2)$, $T_A(e_z) = (0,\, -1)$，$T_B(e_x) = (2,\, 1)$，$T_B(e_y) = (-2,\, -1)$，$T_B(e_z) = (4,\, 2)$ となる。

3) $T_A(e_x) = (1, 0)$ だから l の方程式は $y=0$ である。(1) の結果より $T_A(e_y)$ も $T_A(e_z)$ も共に y 座標が 0 ではないから，その位置ベクトルは直線 l には含まれない。

4) (2) の結果より $T_B(e_x) = (2, 1)$ である。よって原点と $T_B(e_x)$ を通る直線 l' は一次関数である。したがって方程式は $x-2y=0$ となる。（実数倍していても良い。）$T_B(e_y)$ と $T_B(e_z)$ は代入するとそれぞれ方程式を満たすから，これらの位置ベクトルは直線 l' に含まれる。

5)

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{①\times 2} \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\0 & 2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{①+②} \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

よって $r(A) = 2$ である。

$$\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\1 & -1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{①+(-2)\times ②} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow ②} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって $r(B) = 1$ である。

行列 A から定まる線型写像によって 2 次元空間のどの点も 3 次元空間に対応する点が存在する。一方行列 B から定まる線型写像では 1 次元の直線の上の点しか 3 次元空間に対応する点を持たない。これらの数字が行列の階数と一致していることに注意せよ。

3.

1) 行列 $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\w\end{pmatrix}$ である。$T_A(e_x) = (2,-1)$ かつ $T_A(e_y) = (0,1)$ にならなければならないので，$(x,z) = (2,-1)$ かつ $(y,w) = (0,1)$ となる。したがって $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

2) 講義でやった例を用いれば $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる。あとは $AA^{-1} = A^{-1}A = E_2$ を実際に計算して確かめればよい。

3) $A^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ より $T_{A^{-1}}(2,-1) = e_x$ である。また $A^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ より $T_{A^{-1}}(0,1) = e_y$ である。

4)

$$BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$BA^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},$$
$$BA^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

となるから，$T_{BA^{-1}}(2,-1) = (-1,1)$ かつ $T_{BA^{-1}}(0,1) = (1,0)$ である。