線形代数学 I 演習問題

2019 年 5 月 31 日

1. 3 次元空間内のベクトル $\boldsymbol{a} = (-1, 1, 0)$，$\boldsymbol{b} = (2, -1, 1)$ について，次の問いに答えよ。

1) ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と，その大きさを求めよ。
2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に直交し，原点を通る平面の方程式を $ax + by + cz = 0$ の形で求めよ。
3) この平面がベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含むことを確かめよ。（つまり点 $(-1, 1, 0)$ と点 $(2, -1, 1)$ を含むことを示せ。）

2. 3 次元空間の点を $e_x = (1, 0, 0)$，$e_y = (0, 1, 0)$，$e_z = (0, 0, 1)$ とおく。また二つの行列を $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。行列 A，B から定まる線型写像をそれぞれ T_A，T_B としたとき，次の問に答えよ。

1) 線型写像 T_A，T_B はそれぞれ 3 次元空間の原点 $(0, 0, 0)$ を 2 次元空間の原点 $(0, 0)$ に対応させることを確かめよ。
2) 線型写像 T_A と T_B は三点 e_x，e_y，e_z をそれぞれ 2 次元空間のどの点に対応させるか求めよ。
3) 2 次元空間の二点 $\mathbf{0}$ と $T_A(e_x)$ を通る直線 l を求め，$ax + by = 0$ の形で答えよ。また直線 l は点 $T_A(e_y)$ と点 $T_A(e_z)$ の位置ベクトルを含まないことを確かめよ。
4) 2 次元空間の二点 $\mathbf{0}$ と $T_B(e_x)$ を通る直線 l' を求め，$ax + by = 0$ の形で答えよ。また直線 l' は点 $T_B(e_y)$ と点 $T_B(e_z)$ の位置ベクトルを共に含むことを確かめよ。
5) 二つの行列 A と B の階数を求めよ。

3. 2 次元空間の二つの点を $e_x = (1, 0)$，$e_y = (0, 1)$ とおく。次の問いに答えよ。

1) 点 e_x，点 e_y をそれぞれ点 $(2, -1)$，点 $(0, 1)$ へ対応させる線型変換を定める行列 A を求めよ。
2) 行列 A は正則である。逆行列 A^{-1} を求め，行列 A が実際に正則であることを示せ。
3) 行列 A^{-1} が定める線型写像は二点 $(2, -1)$ と $(0, 1)$ をそれぞれ e_x と e_y へ対応させることを示せ。
4) 行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が定める線型写像は点 e_x と点 e_y をそれぞれ点 $(-1, 1)$ と点 $(1, 0)$ へ対応させる。このとき積 BA^{-1} が定める線型写像 $T_{BA^{-1}}$ は点 $(2, -1)$ を点 $(-1, 1)$ へ，点 $(0, 1)$ を点 $(1, 0)$ へ対応させることを確かめよ。