ベクトル解析 まとめ演習の解説

2018 年 1 月 17 日

1. 計算方法が分かれば、あとは微分に注意するだけです。例えば次の通り。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right)=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2x^2}{r^2}\right)$$

よって

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right)&=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)\\
&=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2x^2}{r^2}+1-\frac{2x^2}{r^2}+1-\frac{2x^2}{r^2}\right)\\
&=\frac{1}{r^2}\left(3-\frac{2}{r^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)\\
&=\frac{1}{r^2}\left(3-\frac{2}{r^2}\cdot r^2\right)\\
&=\frac{1}{r^2}\left(3-2\right)\\
&=\frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

2. $t\geq 0$ より、接線ベクトルとその大きさは次の通り。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'(t)&=\left(2,\,-2t^{\frac{1}{2}},\,t\right),\\
|\boldsymbol{r}'(t)|&=\sqrt{2^2+\left(-2t^{\frac{1}{2}}\right)^2+t^2}\\
&=\sqrt{4+4t+t^2}\\
&=t+2.
\end{aligned}$$

あとは公式に当てはめて計算するのみ。

(a)

$$s=\int_0^1|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\int_0^1 t+2\,dt=\frac{5}{2}$$

(b) まず、スカラー場 ϕ の曲線 C 上での値を求めておく。

$$\phi\left(2t,\,-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},\,\frac{1}{2}t^2\right)=3t^2+2t$$

したがって次の通り。

$$\begin{aligned}\int_C \phi\, ds &= \int_0^1 \phi\left(2t,\, -\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},\, \frac{1}{2}t^2\right) |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt \\ &= \int_0^1 (3t^2+2t)(t+2)\, dt \\ &= \frac{65}{12}\end{aligned}$$

(c) 曲線 C 上でのベクトル場と接線ベクトルの内積は次のようになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\left(2t,\, -\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},\, \frac{1}{2}t^2\right)\cdot \boldsymbol{r}'(t) &= \left(2t,\, 0,\, -t^3\right)\cdot\left(2,\, -2t^{\frac{1}{2}},\, t\right) \\ &= 4t + 0 - t^4 \\ &= -t^4 + 4t\end{aligned}$$

したがって接線線積分は次の通り。

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}'\, dt \\ &= \int_0^1 -t^4 + 4t\, dt \\ &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

3. 式を変形し $z = 2x+4y-4$ を得る。ここで $z \leq 0$ であるから、$2x+4y-4 \leq 0$ である。したがって $0 \leq x \leq 2-2y$ であり、また $0 \leq y \leq 1$ である。(y が 1 より大きくなると、$2-2y \leq 0$ となり、$0 \leq x \leq 2-2y$ を満たす x は存在しない。)

(a) 2 つの変数を $x,\, y$ とすると、曲面は次のベクトル方程式で表わせる。

$$\boldsymbol{r}(x,y) = (x,\, y,\, 2x+4y-4) \quad (0 \leq x \leq 2-2y,\, 0 \leq y \leq 1)$$

(b) $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = (1,\, 0,\, 2)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (0,\, 1,\, 4)$ であるから、これらのベクトルの外積は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} &= \left(\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix},\, \begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix},\, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) \\ &= (-2,\, -4,\, 1)\end{aligned}$$

となる。

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right| = \sqrt{21}$$

であるから、単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は次の通り。

$$\boldsymbol{n} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2,\, -4,\, 1)$$

面積は公式通り計算すると求まる。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2-2y} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right| \, dx \right\} \, dy \\
&= \sqrt{21} \int_0^1 2 - 2y \, dy \\
&= \sqrt{21}
\end{aligned}
$$

4. $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = (2,\ 0,\ 1)$, $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (0,\ -3,\ 1)$ である。よってこれらのベクトルの外積とその大きさは

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = (3,\ -2,\ -6), \\
&\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right| = 7.
\end{aligned}
$$

(a) 公式にあてはめれば良い。

$$
\begin{aligned}
\iint_S \phi \, dS &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \phi(2u,\ -3v,\ u+v) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right| \, du \right\} dv \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 -6uv \cdot 7 \, du \right\} dv \\
&= -42 \int_0^1 \frac{1}{2} v \, dv \\
&= -\frac{21}{2}
\end{aligned}
$$

(b) 条件を満たす単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$
\boldsymbol{n} = - \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right|^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right) = \frac{1}{7} (-3,\ 2,\ 6)
$$

また曲面上のベクトル場と $\boldsymbol{n}$ の内積は

$$
\boldsymbol{a}(2u,\ -3v,\ u+v) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{7}(12u - 24uv + 6v)
$$

したがって求める面積分は

$$
\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \, dS &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \boldsymbol{a}(2u,\ -3v,\ u+v) \cdot \boldsymbol{n} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \right| \, du \right\} dv \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 12u - 24uv + 6v \, du \right\} dv \\
&= \int_0^1 6 - 6v \, du \\
&= 3
\end{aligned}
$$