

ベクトル解析 総まとめ演習

2018年1月17日



1. 空間内の点 (x, y, z) の位置ベクトルを \mathbf{r} 、その大きさを $r = |\mathbf{r}|$ とする。このとき次の等式が成り立つことを示せ。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2}$$

2. 曲線 $C: \mathbf{r}(t) = \left(2t, -\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}t^2 \right)$ ($0 \leq t \leq 1$) を考える。
- (a) 曲線 C の長さ s を求めよ。
 - (b) スカラー場 $\phi(x, y, z) = x + 6z$ について、曲線 C に沿った線積分を求めよ。
 - (c) ベクトル場 $\mathbf{a}(x, y, z) = (x, 0, -xz)$ について、曲線 C に沿った接線線積分を求めよ。
3. 方程式 $2x + 4y - z = 4$ ($x, y \geq 0, z \leq 0$) で表わされる曲面 Σ を考える。
- (a) 曲面 Σ を 2 変数のベクトル方程式 \mathbf{r} で表わせ。
 - (b) 曲面 Σ の単位法線ベクトル \mathbf{n} と面積 S を求めよ。
4. ベクトル方程式 $\mathbf{r}(u, v) = (2u, -3v, u + v)$ ($0 \leq u, v \leq 1$) で表わされる曲面 Σ を考える。
- (a) スカラー場 $\phi(x, y, z) = xy$ について、曲面 Σ に関する面積分を求めよ。
 - (b) 曲面 Σ の単位法線ベクトルで、かつ第 3 座標が正となっているものを \mathbf{n} とする。またベクトル場 $\mathbf{a}(x, y, z) = (-x, 2xy, z)$ を考える。このとき $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ の曲面 Σ に関する面積分を求めよ。