演習問題 (ベクトル解析)

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

演習 7.1　次のベクトル場 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ の回転 rot $\boldsymbol{a}$ を求めよ．

(1)　$\boldsymbol{a}(x, y, z) = (e^{xy}, \log xyz, \sin yz)$

$$\mathrm{rot}\, a = \left(z\cos yz - \frac{1}{z},\ 0,\ \frac{1}{x} - xe^{xy} \right)$$

(2)　$\boldsymbol{a}(x, y, z) = (\sin xy, \cos yz, \sin xz)$

$$\mathrm{rot}\, a = (y \sin yz,\ -z \cos xz,\ -x \cos xy)$$

(3)　$\boldsymbol{a}(x, y, z) = (e^{xy}, y \log yz, x^2y^2)$

$$\mathrm{rot}\, a = \left(2x^2y - \frac{y}{z},\ -2xy^2,\ -xe^{xy} \right)$$

演習 7.2　ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ がベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{b} = (b_1(x, y, z), b_2(x, y, z), b_3(x, y, z))$ をもつならば，次が成り立つことを示せ．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) = 0$$

$$\nabla \times b = \left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z},\ \frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial b_3}{\partial x},\ \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times b) = \frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 b_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 b_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 b_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial z \partial y}$$

$$= 0$$

演習 7.3　点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，その大きさを $r = |\boldsymbol{r}|$ とすれば，次が成り立つことを示せ．

$$\nabla \times (r\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

$$r\boldsymbol{r} = (rx, ry, rz)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\nabla \times r\boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(rz) - \frac{\partial}{\partial z}(ry),\ \frac{\partial}{\partial z}(rx) - \frac{\partial}{\partial x}(rz),\ \frac{\partial}{\partial x}(ry) - \frac{\partial}{\partial y}(rx)\right)$$

$$= \left(z\frac{\partial r}{\partial y} - y\frac{\partial r}{\partial z},\ x\frac{\partial r}{\partial z} - z\frac{\partial r}{\partial x},\ y\frac{\partial r}{\partial x} - x\frac{\partial r}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{zy}{r} - \frac{yz}{r},\ \frac{xz}{r} - \frac{zx}{r},\ \frac{yx}{r} - \frac{xy}{r}\right)$$

$$= \boldsymbol{0}$$

演習 7.4　点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，その大きさを $r = |\boldsymbol{r}|\ (r \neq 0)$ とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \boldsymbol{0}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \nabla \times \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

x成分は $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= \frac{-\frac{3}{2}z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{-\frac{3}{2}y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= -3yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3yz(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= 0$$

y, z成分も同様に　$\mathrm{rot}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \boldsymbol{0}$