微分積分学II 演習問題9 解答

2017 年 12 月 7 日

1.

1) $\frac{1}{1-x}$ は $x = 1$ で定義されない。よって

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[-\log(1-x)\Big]_0^{1-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon - 0) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{K\to\infty}\int_1^K \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= \lim_{K\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}x^{-2}\Big]_1^K \\
&= \lim_{K\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{K^2}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2.

1) $\frac{1}{\cos^2 x}$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で定義されない。よって

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)-\tan 0\right) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

2) $\frac{x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$ は $x=1$ で定義されない。よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{2}\int_0^{1-\varepsilon} -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\end{aligned}$$

ここで $t=1-x^2$ とおくと、$dt=-2x\,dx$ であり、積分区間は $x:0\to 1-\varepsilon$ のとき $t:1\to 2\varepsilon-\varepsilon^2$ となる。したがって

$$\begin{aligned}&= \lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{2}\int_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{2}\Big[2\sqrt{t}\Big]_1^{2\varepsilon-\varepsilon^2}\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}-2\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

3.

1)

$$\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 2.$$

2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

4. $x:-1\to 1$ のとき、$t:\pi\to 0$ である。また $dx=-\sin t\,dt$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 y\,dx &= \int_\pi^0 -2\sin t\cdot\sin t\,dt\\ &= \int_0^\pi 2\sin^2 t\,dt\\ &= \int_0^\pi 1-\cos 2t\,dt\\ &= \left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^\pi\\ &= (\pi-0)-(0-0)\\ &= \pi.\end{aligned}$$

5. 教科書参照