微分積分学II 演習問題8 解答

2017 年 11 月 30 日

1.

1) $t = x^2 + x - 2$ と置く。よって積分する区間は $x : 0 \to 1$ のとき $t : -2 \to 0$ となる。
また $dt = 2x + 1\ dx$ だから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)\, e^{x^2+x-2}\ dx &= \int_{-2}^0 e^t\ dt \\ &= \Big[e^t\Big]_{-2}^0 \\ &= 1 - \frac{1}{e^2}.\end{aligned}$$

2) 部分積分を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,(\sin x)'\ dx \\ &= \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{0}} \sin x\ dx \\ &= \left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.\end{aligned}$$

2.

1) 0　　2) 0　　3) ∞　　4) $-\infty$

3.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ は 1 で定義されない。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1-\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\sqrt{1-(1-\varepsilon)}+2\sqrt{1-0}\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

2) $\dfrac{1}{x^2}$ は 0 で定義されない。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^2}\,dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1\\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\\ &= \infty.\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^x\,dx &= \lim_{K\to-\infty}\int_K^0 e^x\,dx\\ &= \lim_{K\to-\infty}\Big[e^x\Big]_K^0\\ &= \lim_{K\to-\infty}\left(e^0-e^K\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{K\to\infty}\int_1^K\frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{K\to\infty}\Big[\log|x|\Big]_1^K\\ &= \lim_{K\to\infty}(\log K-\log 1)\\ &= \infty.\end{aligned}$$

4.

1) $t = \cos x$ と置く。よって積分する区間は $x : 0 \to \frac{\pi}{3}$ のとき $t : 1 \to \frac{1}{2}$ となる。また $dt = -\sin x \, dx$ だから、

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1 - \cos^2 x\right) \sin x \, dx \\
&= \int_1^{\frac{1}{2}} -1 + t^2 \, dt \\
&= \left[-t + \frac{1}{3}t^3\right]_1^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

2) $t = \sqrt{x+1}$ と置く。よって積分する区間は $x : 3 \to 8$ のとき $t : 2 \to 3$ となる。また $x = t^2 - 1$ かつ $dx = 2t \, dt$ だから、

$$\begin{aligned}
\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \, dx &= \int_2^3 \frac{2}{t^2 - 1} \, dt \\
&= \int_2^3 \frac{2}{(t-1)(t+1)} \, dt \\
&= \int_2^3 \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \, dt \\
&= \Big[\log|t-1| - \log|t+1|\Big]_2^3 \\
&= (\log 2 - \log 4) - (\log 1 - \log 3) \\
&= \log \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

3) 部分積分を用いると、

$$\begin{aligned}
\int_1^e \log x \, dx &= \int_1^e x' \log x \, dx \\
&= \Big[x \log x\Big]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\
&= e - 0 - \Big[x\Big]_1^e \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$ と置く。部分積分を用いると、

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (-\cos x)' \, dx &= \Big[-e^x \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx \\
&= 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x)' \, dx \\
&= 1 + \Big[e^x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx \\
&= 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I.
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left(1 + e^{\frac{\pi}{2}}\right).
$$

5. 教科書参照

6. 教科書参照